

۱ اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

۰٫۴۸ (۴)

۰٫۲۷ (۳)

-۰٫۵۲ (۲)

-۱٫۲۳ (۱)

۲ حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

$\frac{5}{8}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

۳ حاصل عبارت $\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۴ اگر $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(\pi + x) = 1$ ، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

-۱ (۴)

$-\frac{7}{9}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

۰ (۱)

۵ اگر $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟

$-\frac{5}{13}$ (۴)

$\frac{5}{13}$ (۳)

$-\frac{12}{13}$ (۲)

$\frac{12}{13}$ (۱)

۶ اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ ، آن گاه حاصل $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}$ کدام می تواند باشد؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

۴ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۷ اگر $\sin^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{3} + \sin^4 x$ ، آن گاه مقدار مثبت $\tan x$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

۸ حاصل عبارت $(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2})$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ چقدر است؟

$-\frac{1}{8}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

۹ اگر $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ باشد، آن گاه حاصل $\sin \theta \cos \theta$ کدام است؟

۰٫۵ (۴)

۰٫۴ (۳)

۰٫۳ (۲)

۰٫۲ (۱)



۱۰ اگر $\cos \alpha = 2m + 1$, $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ باشد، حدود m کدام است؟

۴ $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

۳ فقط $m = -\frac{1}{4}$

۲ $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$

۱ $-\frac{1}{4} < m \leq 0$

۱۱ اگر $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ باشد، حدود تغییرات $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ کدام است؟

۴ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

۳ $(0, \frac{1}{2})$

۲ $(\frac{1}{2}, 1]$

۱ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{پس : } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0,27$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

ابتدا تمام زوایا را بر حسب 20° می نویسیم:

$$\sin 25^\circ = \sin(27^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \sin 70^\circ = \sin(72^\circ - 2^\circ) = \sin(-2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos(54^\circ + 2^\circ) = \cos(18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ} = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 2^\circ}{-1 + \tan 2^\circ} = \frac{-1 - 0,4}{-1 + 0,4} = \frac{-1,4}{-0,6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

می دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ) \sin(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 20^\circ) \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{2 \sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \times 40^\circ)}{2 \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{4 \sin 80^\circ} = \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

بنابراین با جایگذاری در تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$-\cos x - 2 \cos x = 1 \Rightarrow -3 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\cos 2x = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

حال برای محاسبه $\cos 2x$ از تساوی $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ کمک می گیریم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \text{ می دانیم که}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵



$$\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow 3 \tan \alpha - 3 = 2 \tan \alpha + 2 \rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\text{پس: } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{10}{1 + 25} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \rightarrow 4 + 4 \tan^2 x = 5 \rightarrow \tan^2 x = 1 \rightarrow \tan x = 1$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0 \rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9} \tan x = \frac{5 \pm 3}{4} = 2, \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \begin{cases} \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) \xrightarrow{\tan x = 2} 1 \\ \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) \xrightarrow{\tan x = \frac{1}{2}} 4 \end{cases}$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می دانیم: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{3} + \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\text{از طرفی: } \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = 3 - 3 \tan^2 x$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 x = 2 \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به فرمول های 2α داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{x}{2}} \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{cases}$$

لذا داریم:

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1) = \frac{1}{2} \sin x (-\cos x) = -\frac{1}{2} \sin x \cos x$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 2x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{12}} -\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می دانیم: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3 \rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 3 \sin \theta - 3 \cos \theta \rightarrow 4 \cos \theta = 2 \sin \theta \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

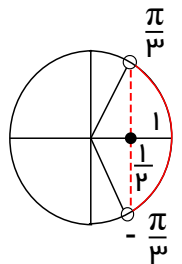
$$\rightarrow \tan \theta = 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1 + 4} = \frac{2}{5} = 0.4$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به دایره ی مثلثاتی وقتی $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ، کسینوس زاویه ی α در فاصله ی $[\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد، لذا:

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2m + 1 \leq 1$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} < 2m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < m \leq 0$$



مثال های تست ۱

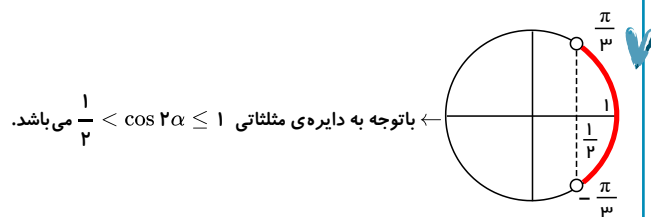


می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

$$-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6} \rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$$

حال باید حدود $\cos 2\alpha$ را پیدا کنیم.



پاسخ نامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴

۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴